

分散性津波方程式の高速な新解法の開発

岡山大学 ○竹中 博士 1*
岡山大学 秦 真平 1*

津波 シミュレーション 分散
線形 非線形 差分法

研究の目的

津波の伝播速度は、水深だけでなく津波の波長によっても変化する。これが、(波数)分散性で、遠地の津波はもちろん近地の津波についても分散の効果が重要であることが近年の研究で強調されている。しかし、分散を含む津波の方程式を解く数値シミュレーションは、従来の解法では線形の場合でさえ、分散を含まないシミュレーションに比べて通常 60 倍以上の計算時間を要する。本研究は、その計算時間を4分の1程度にまで減らすことのできる原理的なブレイクスルーに基づいた数値計算スキームを開発・実装し、そのスキームの有効性を示す。

研究の内容、方法、成果、新知見

津波には近地津波と遠地津波がある。近地津波は沿岸を震源とする地震等により生じる津波である。一方で、遠地津波は遠方を震源とする地震等により生じる津波であり、長距離を伝播することになるので、地球のコリオリの力を無視できなくなる。近地津波か遠地津波かによって津波シミュレーションに適用される分散波方程式は異なる。また、その津波が深海域を伝播するのか、それとも浅海域を伝播するのかによっても扱われる方程式が変わってくる(前者では線形、後者では非線形の方程式になる)。したがって、近地津波で深海域または浅海域を伝播する場合と、遠地津波で深海域または浅海域を伝播する場合に適用する計4通りの分散波方程式がある。

例えば、近地の深海域では、次の線形分散波の方程式が、しばしば時間・空間のスタガード格子差分法等で数値的に解かれている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

ここで、座標系は水平方向を x, y 座標とするデカルト座標系を採用し、 t は時間、 M, N はそれぞれ線流量の x, y 成分、 η は波高、 h は水深である。上の第1式と第2式の右辺が分散項で、これをゼロに置き換えると非分散の線形長波方程式になる。上の方程式を差分法で解く場合、第3式は時間について陽解法で安定に解けるが、 M と N の時間を進めるための第1式と第2式は、安定に解くために通常(線形長波の場合と異なり、)陰解法が用いられる。陰解法では大規模な連立一次方程式を解く必要があるため、この計算は線形長波方程式に比べて極めて計算時間がかかる。

この問題に対し、竹中・他(2017, 地震学会)は陰解法の計算サイズを4分の1にする以下の新しいアプローチを提案した。上の方程式の線流量に分散項を含めて別の

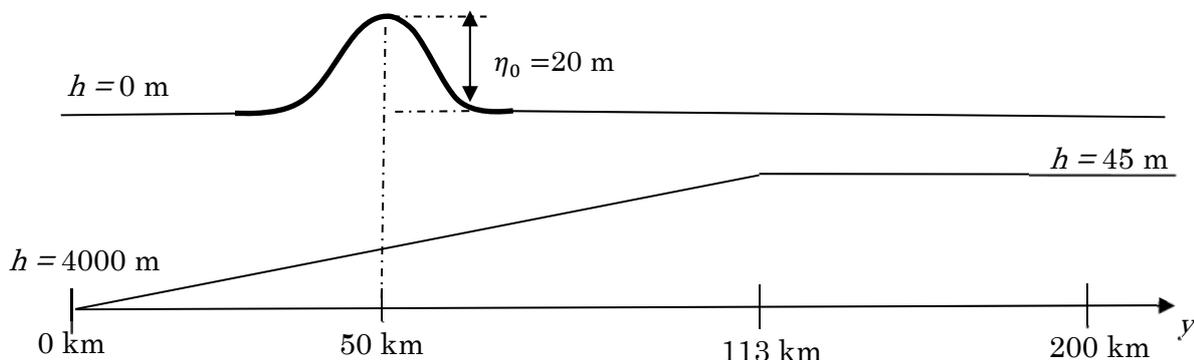


図1. 水深モデルと初期水位。測線($x=100$ km)下の海底地形と同測線上の初期水位分布(2次元コサイン関数)を表す。水深モデルは奥行方向に一様で、 y 軸の正の向きに傾斜勾配 3.5%で次第に浅くなり、最深部が 4000 m、最浅部が 45 m。初期水位の分布は、 x 軸及び y 軸方向にコサイン型である。

変数に置き換え、式の変形をすると以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{3} \nabla \cdot (h^2 \nabla) \frac{\partial \eta}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

ここで、 U, V は分散項を含んだ線流量の x, y 成分、 ∇ は2次元のハミルトン演算子である。上の第1式と第2式は、 M, N と U, V という物理量の違いはあるものの、線形長波の対応する式と同じである。地震津波の場合、一般にいずれも初期条件が $M=N=0$ と $U=V=0$ であることを考えると、数値計算的には両者は同一であり、同じ差分法（すなわち陽解法）で解くことができる。分散項は、第3式にのみ現れている。この式は、水位速度（鉛直流速） $d\eta/dt$ についてのポアソン方程式（ヘルムホルツ方程式）である。この式の解き方は、まず、水位速度 $d\eta/dt$ についてのポアソン方程式を対称係数行列用のポアソンソルバー（陰解法）で解き、その後、時間積分して波高 η を求める。これが、線形分散波方程式の新スキームである。本研究では、このアプローチを近地津波の浅海域のための非線形分散波方程式、遠地津波のための線形及び非線形分散波方程式にも適用し、これらを解く新スキームを開発・実装し、従来のスキームの4～6倍の高速化を実現した。

ここで、近地津波の線形及び非線形分散波方程式と線形及び非線形長波方程式を用いた計算例を示す。非線形の場合のマニングの粗度係数の値は、0.025とした。水深モデルと初期水位を図1に示す。計算領域は50 km×200 km、格子間隔と時間ステップは $\Delta x = \Delta y = 0.5$ km、 $\Delta t = 1.0$ sと設定して計算した。図2に $t=700$ s, 800 s, 1000 s, 1300 sにおける測線($x=25$ km)上での波高分布を示す。線形の方程式と非線形の方程式による計算結果を比較すると、それぞれの波の形状に大きな違いがあることが分かる。非線形の結果は線形の結果よりも位相が前方向にずれている。これは波の非線形性の特徴の1つで、波の前傾化と呼ばれる現象である。さらにしばらくすると波の先端が切り立ってくる。また、非線形長波方程式(緑線)と非線形分散波方程式(赤線)の計算結果を比較すると、後者は位相が全体的に後方にずれ、前傾化が抑えられている。これは分散性と非線形性の相互作用によるものである。

今後の予定

今後、これらの成果を論文にまとめ、学術雑誌に投稿する予定である。

謝辞

小松正直博士（岡山大学）、中村武史博士（防災科学技術研究所）、村越 匠博士（防衛大学校）には本研究をサポートしていただきました。記して感謝いたします。

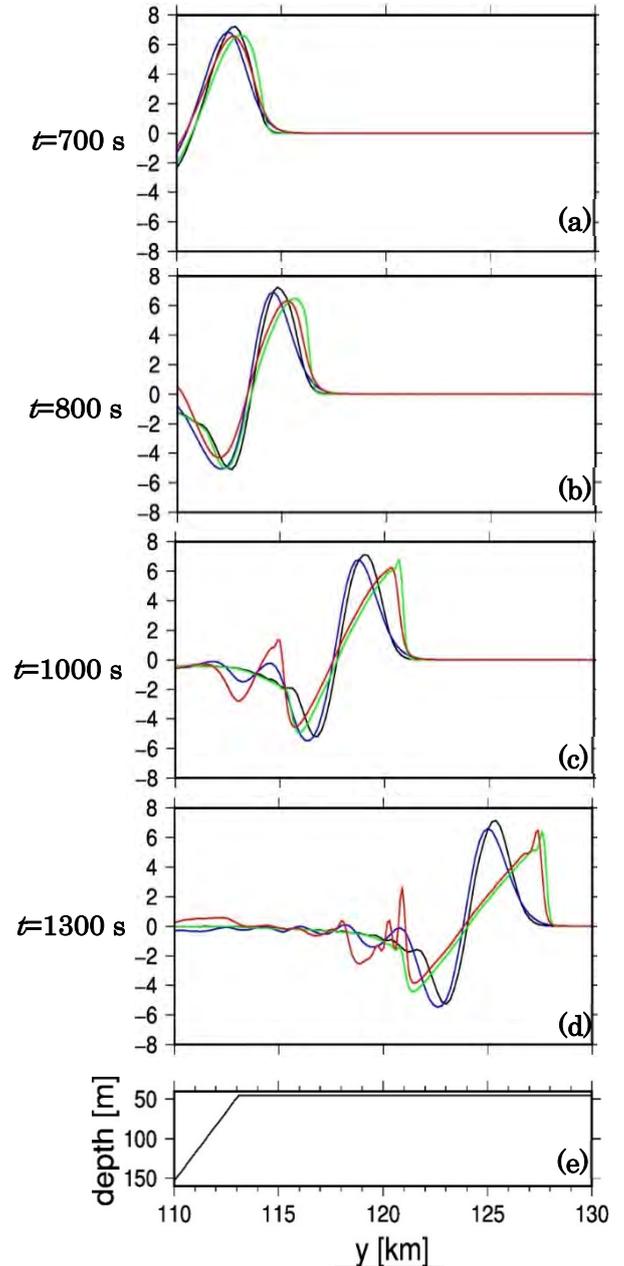


図2. (a) $t=700$ s, (b) $t=800$ s, (c) $t=1000$ s, (d) $t=1300$ sにおける測線($x=25$ km)上の波高分布の比較と(e)同測線下の海底地形. 黒線は線形長波方程式; 青線は線形分散波方程式(新スキーム), 緑線は非線形長波方程式, 赤線は非線形分散波方程式(新スキーム)による結果.